7 Integrasjon

7.1 Antiderivasjon

> *restart* :

For å finne den antideriverte eller det ubestemte integralet til $f(x)$ benytter vi oss av integrasjonskommandoen int.

- int($f(x)$,x) finner det ubestemet integralet til $f(x)$

  Int($f(x)$,x) skriver integrasjonssymbolet $\int f(x)\,\mathrm{d}x$

- Integral($f(x)$,x) i vgs-pakken beregner et ubestemt integral og tar med den vilkårlige konstanten

> $Int(f(x), x) = int(f(x), x)$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

Fargen på integraltegnet er grått på det inaktive integraltegnet og blått på det aktive integraltegnet.

> $Int(x^2, x) = int(x^2, x)$

$$\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}$$

Vi må selv legge til en vilkårlig konstant for å få alle de antideriverte.
Deriverer vi på hver side får vi en kontroll på at utregningen er korrekt.

> $diff(\%, x)$

Generelt

$$x^2 = x^2$$

> $Int(f(x), x) = F(x) + C$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

> $diff(\%, x)$

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(x)$$

> $Integral(f(x), x)$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C$$

> $Integral(x^2, x)$

$$\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + C$$

>

Eksempel 7.1.1

Finn $F(x)$ når $F'(x) = 3x^2$

Løsning

> $Diff(F(x), x) = 3x^2$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(x) = 3x^2$$

> $map(Int, \%, x)$

$$\int \left(\frac{d}{dx} F(x)\right) dx = \int 3\, x^2\, dx$$

> $value(\%) + (0 = C)$ #Her legges 0 til på venstre side og C på høyre side

$$F(x) = x^3 + C$$

Noen andre integrasjoner i en fei:

> $Lf := \left[k, x, x^2, x^3, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{\sqrt{x}}, x^n\right] : \%$

$$\left[k, x, x^2, x^3, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{\sqrt{x}}, x^n\right]$$

> $LF := map(int, Lf, x) : \%$

$$\left[k\, x, \frac{x^2}{2}, \frac{x^3}{3}, \frac{x^4}{4}, -\frac{1}{x}, 2\sqrt{x}, \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]$$

Vi må legge til konstanten C for å få samtlige antideriverte.

> $map(x \mapsto x + C, LF)$

$$\left[k\, x + C, \frac{x^2}{2} + C, \frac{x^3}{3} + C, \frac{x^4}{4} + C, -\frac{1}{x} + C, 2\sqrt{x} + C, \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right]$$

> $map(Integral, Lf, x)$

$$\left[\int k\, dx = k\, x + C, \int x\, dx = \frac{x^2}{2} + C, \int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} + C, \int x^3\, dx = \frac{x^4}{4} + C, \int \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x} + C, \int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2\sqrt{x} + C, \int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right]$$

>

7.2 Integrasjon

> **restart:**

- int($f(x), x = a..b$) beregner det bestemte integralet av $f(x)$ over intervallet $x = a..b$
- Int($f(x), x = a..b$) skriver kun integrasjonsymbolet
- value(Int(...)) = int(...) *value* foran integrasjonskommandoen *Int* gjør at integralet beregnes
- Integral($f(x), x=a..b$) i vgs-pakken beregner det bestemte integralet

Noen integrasjonsregler

> $Int(x^n, x) = int(x^n, x) + C;$

for $n \neq -1$

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$n \neq -1$$

> $\int \sin(x)\, dx = \int \sin(x)\, dx + C$

$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$$

> $Int(\cos(x), x) = int(\cos(x), x) + C$

$$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$$

En konstant kan settes utenfor integrasjonstegnet.

> $Int(k \cdot f(x), x) = simplify(int(k \cdot f(x), x))$

$$\int k\,f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$$

Vi kan integrere ledd for ledd.

> $Int(u(x) + v(x), x) = expand(int(u(x) + v(x), x))$

$$\int (u(x) + v(x))\,dx = \int u(x)\,dx + \int v(x)\,dx$$

>

Eksempel 7.2.1

Regn ut de ubestemte integralene

a) $\int \frac{1}{3}x^2 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$, **b)** $\int \frac{3}{100}x^2 - \frac{1}{100}x + 5\,dx$

c) $\int (x+3)(x-2)\,dx$, **d)** $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx$

Løsning

a)

> $A := Int\left(\frac{x^2}{3} - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}, x\right):$

> $A = value(A) + C$

$$\int \left(\frac{x^2}{3} - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx = \frac{3}{x} + \frac{x^3}{9} + \sqrt{x} + C$$

>

Her har vi definert integralet ved Int og så brukt value for å beregne integralet. Ellers kan vi alltid benytte Int på venstre side og int på høyre side.

Kontroll på at svaret er riktig får vi ved å derivere venstre og høyre side over. Da skal svaret bli det samme på begge sider og lik integranden.

Kontroll

> $diff(\%, x)$

$$\frac{x^2}{3} - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{x^2}{3} - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

> $simplify(\%)$

$$\frac{x^2}{3} - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{x^2}{3} - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

b)

> $Int\left(\frac{3x^2}{100} - \frac{x}{100} + 5, x\right) = int\left(\frac{3x^2}{100} - \frac{x}{100} + 5, x\right) + C$

$$\int \left(\frac{3}{100}x^2 - \frac{1}{100}x + 5\right) dx = \frac{1}{100}x^3 - \frac{1}{200}x^2 + 5x + C$$

c)

> $A := Int((x+3)\,(x-2), x)$:

> $A = expand(A)$

$$\int (x+3)\,(x-2)\,\mathrm{d}x = \int x^2\,\mathrm{d}x + \int x\,\mathrm{d}x - 6\int 1\,\mathrm{d}x$$

> $rhs(\%) = value(rhs(\%)) + C$

$$\int x^2\,\mathrm{d}x + \int x\,\mathrm{d}x - 6\int 1\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{1}{2}\,x^2 - 6\,x + C$$

d)

> $A := \int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$:

$A = expand(A)$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

> $rhs(\%) = value(rhs(\%)) + C$

$$\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \frac{2\,x^{3/2}}{3} + 2\sqrt{x} + C$$

Kontroll

> $diff(\%, x)$

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

>

Eksempel 7.2.2

Bestem $F(x)$ når $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 2\,x$ og $F(4) = 8$.

Løsning

> $Diff(F(x), x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 2\,x$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,F(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 2\,x$$

> $map(Int, \%, x)$;

$$\int \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,F(x)\right)\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 2\,x\right)\mathrm{d}x$$

> $lign := value(\%) + (0 = C)$: %

$$F(x) = 2\sqrt{x} + x^2 + C$$

Konstanten bestemmes av betingelsen $F(4) = 8$.

> $subs(x = 4, F(4) = 8, lign)$

$$8 = 2\sqrt{4} + 16 + C$$

> $isolate(\%, C)$

$$C = -8 - 2\sqrt{4}$$

Da får vi

> $subs(\%, lign)$

$$F(x) = 2\sqrt{x} + x^2 - 8 - 2\sqrt{4}$$

Bestemt integral

Eksempel 7.2.3

Beregn integralet $\int_0^1 (x^2 - 3x + 2)\, dx$

Løsning

Vi regner først ut det ubestemte integralet for å finne F.

> $\int (x^2 - 3x + 2)\, \mathrm{d}x = \int (x^2 - 3x + 2)\, \mathrm{d}x$

$$\int (x^2 - 3x + 2)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 + 2x$$

Vi kan gjøre om høyre side til en funksjon av x ved hjelp av kommandoen unapply uten å måtte skrive opp eller å kopiere utrrykket for å få definert funksjonen ved hjelp av pilen (som symboliserer tilordningen).

- unapply(F, x) gjør om uttrykket F til en funksjon av x, $F = F(x)$

> $F := unapply(rhs(\%), x)$

$$F := x \mapsto \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{3}{2} \cdot x^2 + 2 \cdot x$$

Her ser vi at $\rightarrow$ kommer frem og viser at F er definert som en funksjon.

> $A := \int_0^1 (x^2 - 3x + 2)\, \mathrm{d}x :$
> $A = 'F(1) - F(0)'$

$$\int_0^1 (x^2 - 3x + 2)\, \mathrm{d}x = F(1) - F(0)$$

Apostrofene rundt $F(1) - F(0)$ gjør at Maple utsetter å beregne uttrykket første gang vi bruker det. Nå kaller vi opp ligningen over på nytt med %.

> **%;**

$$\int_0^1 (x^2 - 3x + 2)\, \mathrm{d}x = \frac{5}{6}$$

> $'F(1)' = F(1), 'F(0)' = F(0)$

$$F(1) = \frac{5}{6}, F(0) = 0$$

Direkte beregning

> $A = value(A)$

$$\int_0^1 (x^2 - 3x + 2)\, \mathrm{d}x = \frac{5}{6}$$

Eksempel 7.2.4

Regn ut de bestemte integralene

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt,\ \int_1^3 \frac{1}{u^3}\,du,\ \int_0^3 (3y^2+2y)\,dy,\ \int_1^2 \frac{a^2+1}{a^2}\,da$$

Løsning

Vi plasserer integralene på listeform.

$$> B := \left[\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t,\ \int_1^3 \frac{1}{u^3}\,\mathrm{d}u,\ \int_0^3 (3y^2+2y)\,\mathrm{d}y,\ \int_1^2 \frac{a^2+1}{a^2}\,\mathrm{d}a\right]:$$

$$> B = value(B)$$

$$\left[\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t,\ \int_1^3 \frac{1}{u^3}\,\mathrm{d}u,\ \int_0^3 (3y^2+2y)\,\mathrm{d}y,\ \int_1^2 \frac{a^2+1}{a^2}\,\mathrm{d}a\right] = \left[2, \frac{4}{9}, 36, \frac{3}{2}\right]$$

7.3 Integral og areal

$> restart:$

$$> \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Det bestemte integralet $\int_a^b f(x)\,dx$ kan defineres som arealet begrenset av kurven $f(x)$, $x-$ aksen og de to loddrette linjene $x=a$ og $x=b$. Og dette arealet er tilnærmet lik summen av uendelig mange tynne rektangler, som figuren under viser. Figuren under fremkommer med kommandoen middlebox.

- middlebox$(f(x), x=a..b, n)$ plotter rektangler begrenset av kurven $f(x)$, x-aksen og linjene $x=a$ og $x=b$. n er antall rektangler
- middlesum$(f(x), x=a..b, n)$ skriver opp summen av arealene av rektangler begrenset av kurven $f(x)$, x-aksen og linjene $x=a$ og $x=b$, n er antall rektangler

  value(middlesum) eller evalf(middlesum) beregner summen av arealene

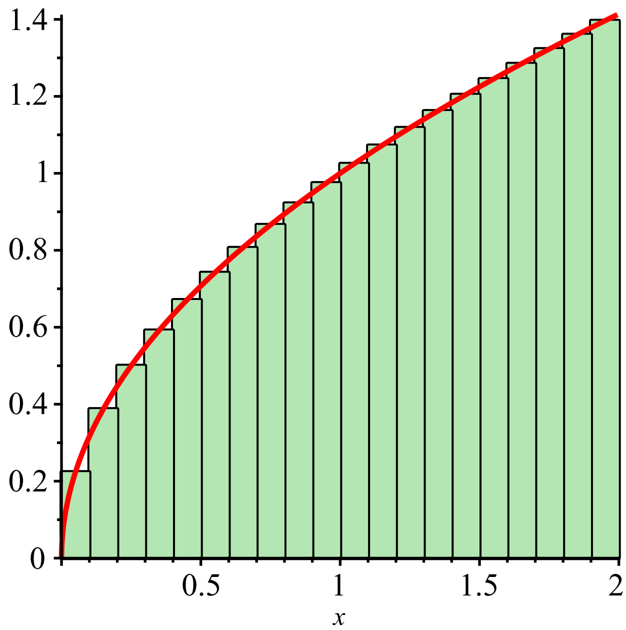
$> f := x \mapsto \sqrt{x}:$

Oppdeling i 20 rektangler.

$> middlebox(f(x), x=0..2, 20)$

Oppdeling i 200 rektangler gir

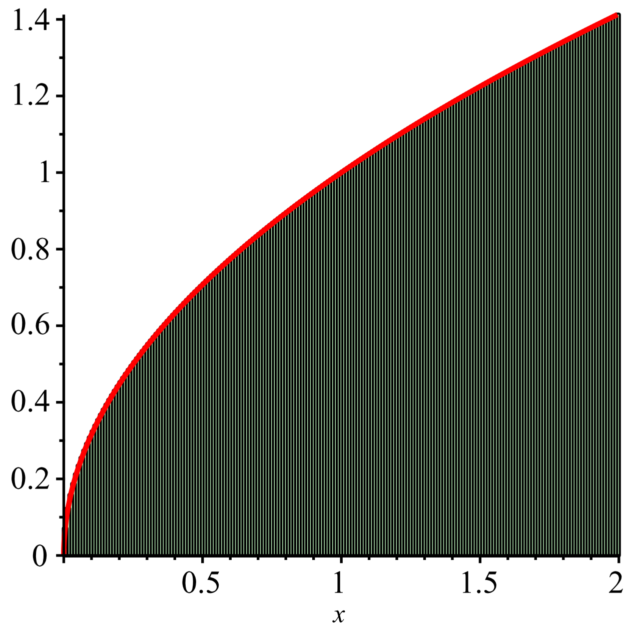
$> middlebox(f(x), x=0..2, 200)$



Arealet av rektanglene blir

> $A20 := middlesum(f(x), x = 0..2, 20):$
> $A20 = evalf(A20)$

$$\frac{\left(\sum_{i=0}^{19}\sqrt{\frac{i}{10}+\frac{1}{20}}\right)}{10} = 1.887396240$$



Arealet av rektanglene blir

> $A200 := middlesum(f(x), x = 0..2, 200):$
> $A200 = evalf(A200)$

$$\frac{\left(\sum_{i=0}^{199}\sqrt{\frac{i}{100}+\frac{1}{200}}\right)}{100} = 1.885677498$$

Beregningen under viser at arealet av 200 rektangler er riktig med 4 desimaler. Deler vi opp i uendelig mange rektangler, så får vi eksakt det samme svaret som det bestemte integralet av $f(x)$ fra $x = 0$ til $x = 2$. Vi definerer først summen som en funksjon av x og så lar vi n gå mot uendelig.

> $MS := n \mapsto middlesum(f(x), x = 0..2, n):$
> $\lim_{n\to\infty} MS(n) = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\left(\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{2}\sqrt{\frac{i+\frac{1}{2}}{n}}\right)}{n} = \int_0^2 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$

> $value(\%)$

$$\frac{4\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

> $evalf(\%)$

$$1.885618082 = 1.885618082$$

>

Eksempel 7.3.1

Regn ut arealet av flaten begrenset av grafen til
$f(x) = 6x - x^2 - 5$, $x-$ aksen og linjen $x = 3$.

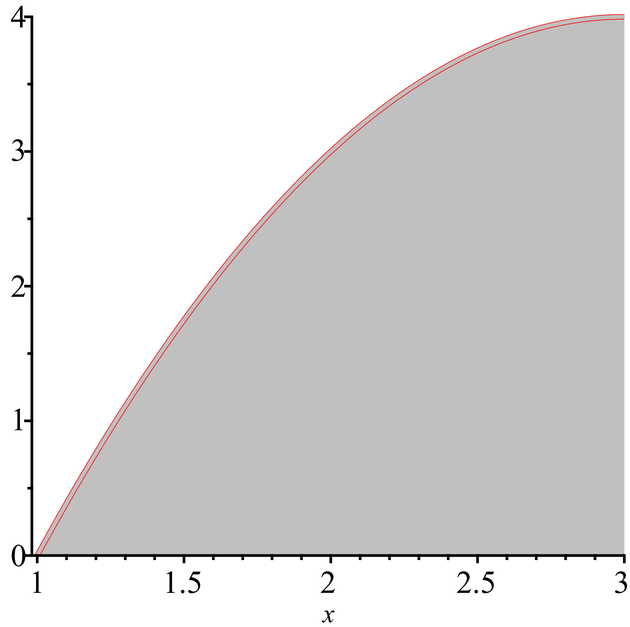
Løsning

>

> $f := x \mapsto 6 \cdot x - x^2 - 5$:

Arealet er vist på figuren under.

> $p1 := plot(f(x), x = 1..3, color = red, thickness = 2)$:
$p2 := plot(f(x), x = 1..3, color = grey, filled = true)$:
$display(p1, p2)$



Arealet blir

> $A := \int_1^3 f(x)\, dx$:
$A = value(A)$

$$\int_1^3 (-x^2 + 6x - 5)\, dx = \frac{16}{3}$$

Mellomregning

> $\int f(x)\, dx = \int f(x)\, dx$

$$\int (-x^2 + 6x - 5)\, dx = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x$$

> $F := unapply(rhs(\%), x)$

$$F := x \mapsto -\frac{1}{3} \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 - 5 \cdot x$$

> $A = 'F(3) - F(1)'$

$$\int_1^3 (-x^2 + 6x - 5)\, dx = F(3) - F(1)$$

> $value(\%)$

$$\frac{16}{3} = \frac{16}{3}$$

Eksempel 7.3.2

Gitt $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ og den rette linjen $3x - 2y + 4 = 0$.

a) Tegn grafene i samme koordinatsystem og finn skjæringspunktene mellom dem.
b) Regn ut arealet av den flaten som er avgrenset av grafen til $f(x)$ og den rette linjen.

Løsning

a)

> $f := x \mapsto \frac{x^2}{2}$

$$f := x \mapsto \frac{x^2}{2}$$

> $3x - 2y + 4 = 0$

$$3x - 2y + 4 = 0$$

> $isolate(\%, y)$

$$y = \frac{3x}{2} + 2$$

> $g := rhs(\%)$:
> $plot([f(x), g], x = -2..5, legend = [typeset(f(x)), typeset(g)], thickness = 2, color = [red, green])$

Skjæringspunktenes koordinater bestemmes av ligningen

> $f(x) = g$

$$\frac{x^2}{2} = \frac{3x}{2} + 2$$

> $solve(\%, \{x\})$

$$\{x = 4\}, \{x = -1\}$$

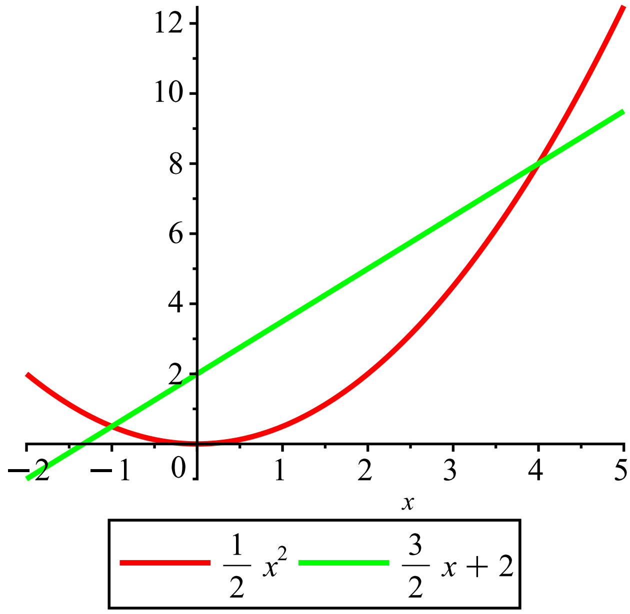
Skjæringspunktene blir

> $map(subs, [\%], [x, f(x)])$

$$\left[[4, 8], \left[-1, \frac{1}{2}\right]\right]$$

b)

Arealet finnes som differensen mellom arealet under den grønne kurven og arealet under den



rød kurven.

$$> A := \int_{-1}^{4} g \, dx - \int_{-1}^{4} f(x) \, dx :$$

$$> A = value(A)$$

$$\int_{-1}^{4} \left(\frac{3x}{2} + 2 \right) dx - \int_{-1}^{4} \frac{x^2}{2} \, dx = \frac{125}{12}$$

7.4 Volum av rotasjonslegemer

Volumet av et rotasjonslegeme ved rotasjon av en kurve om $x-$ aksen eller $y-$ aksen kan beregnes og visualiseres med VolumeOfRevolution.

- VolumeOfRevolution($f(x)$, $x = a..b$, *axis* = *akse*, *opsjon*) beregner/plotter/skriver opp integralet av volumet av omdreiningslegemet som fremkommer når $f(x)$ roterer om x-aksen (*akse* = *horizontal*) eller y-aksen (*akse* = *vertical*). Med opsjonen *output* = *value* (standard opsjon) beregnes volumet, *output* = *plot* plotter omdreiningslegemet, *output* = *integral* skriver opp integralet.
- VolumeOfRevolution($f(x)$, $g(x)$, $x = a..b$, axis = akse, opsjon) gjør det samme som beskrevet over, men nå for volumet begrenset av $f(x)$ og $g(x)$
- RotasjonsVolum i vgs-pakken gjør samme jobben og inkluderer mer

Eksempel 7.4.1

Et flatestykke avgrenset av x-aksen, grafen til $f(x) = \frac{x^2}{2}$ og linjene $x = 1$ og $x = 3$, roterer om henholdsvis x-aksen og y-aksen.

a) Finn volumet av rotasjonslegemet som fremkommer ved rotasjon om x-aksen.
b) Finn volumet av rotasjonslegemet som fremkommer ved rotasjon om y-aksen.

Løsning

$> restart :$

a)

$$> f := x \mapsto \frac{x^2}{2} :$$

> *VolumeOfRevolution*($f(x)$, $x = 1..3$, *axis* = *horizontal*, *output* =:-*plot*, *title* = "Rotasjonsflate", *tickmarks* = [3, 3,

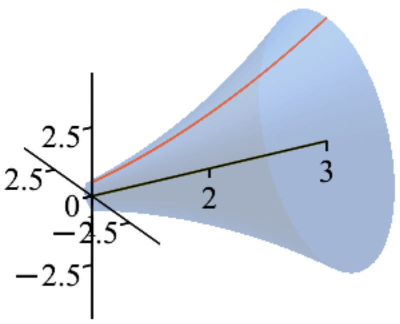
b)

$$> f := x \mapsto \frac{x^2}{2} :$$

> *VolumeOfRevolution*($f(x)$, $x = 1..3$, *axis* = *vertical*, *output* =:-*plot*, *title* = "Rotasjonsflate", *tickmarks* = [3, 3,

3])

Rotasjonsflate



The solid of revolution created on $1 \leq x \leq 3$ by

Flaten begrenser det aktuelle volumet gitt ved

$V_x = VolumeOfRevolution(f(x), x = 1..3,$
$axis = horizontal, output = integral)$

$$V_x = \int_1^3 \frac{\pi x^4}{4}\, dx$$

$value(\%)$

$$V_x = \frac{121\,\pi}{10}$$

> $evalf(\%)$

$$V_x = 38.01327111$$

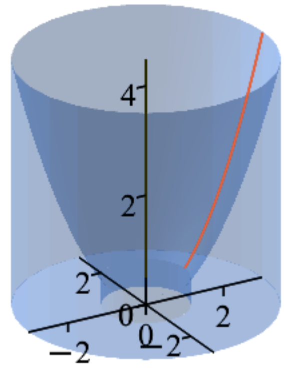
> $g := 0:$
> $RotasjonsVolum(f(x), g, x = 1..3, graf)$

$$\int_1^3 \frac{\pi x^4}{4}\, dx = \frac{121\,\pi}{10}$$

$$\int_1^3 \frac{\pi x^4}{4}\, dx = 38.0133$$

3])

Rotasjonsflate



The solid of revolution created on $1 \leq x \leq 3$ by

Flaten begrenser det aktuelle volumet gitt ved

$V_y = VolumeOfRevolution(f(x), x = 1..3,$
$axis = vertical, output = integral)$

$$V_y = \int_1^3 \pi x^3\, dx$$

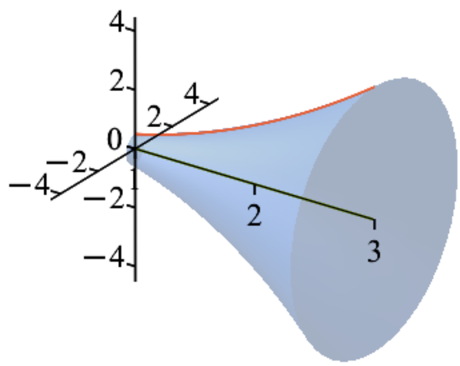
$value(\%)$

$$V_y = 20\,\pi$$

$evalf(\%)$

$$V_y = 62.83185308$$

> $graf$



> $RotasjonsVolum(f(x), g, x = 1..3, graf, akse = vertikal)$

> $graf$

$$\int_{1}^{3} \pi x^3 \, dx = 20\pi$$

$$\int_{1}^{3} \pi x^3 \, dx = 62.8319$$